

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA CRNE GORE  
OLIMPIJADA ZNANJA 2026

Rješenja zadataka iz MATEMATIKE

za I razred srednje škole

1. Neka je niz  $(a_n)_{n \geq 1}$  niz realnih brojeva takav da  $|a_{n+1} - a_n| \leq 1$  za svako  $n \in \mathbf{N}$  i  $(b_n)_{n \geq 1}$  je niz realnih brojeva definisan na sljedeći način

$$b_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

Dokazati da  $|b_{n+1} - b_n| \leq \frac{1}{2}$  za svako  $n \in \mathbf{N}$ .

**Rješenje:** Na početku primijetimo da ako pretpostavimo da za prirodne brojeve  $m, n$  važi  $m > n$ , onda iz uslova  $|a_{n+1} - a_n| \leq 1$  koristeći nejednakost  $|x + y| \leq |x| + |y|$ ,  $x, y \in \mathbf{R}$ , nalazimo

$$\begin{aligned} |a_m - a_n| &= |a_m - a_{m-1} + a_{m-1} - a_{m-2} + \cdots + a_{n+1} - a_n| \\ &\leq \sum_{k=n}^{m-1} |a_{k+1} - a_k| \leq m - n. \end{aligned}$$

Sa druge strane,

$$\begin{aligned} |b_{n+1} - b_n| &= \frac{|na_{n+1} - a_1 - \cdots - a_n|}{n(n+1)} \\ &\leq \frac{|a_{n+1} - a_1| + \cdots + |a_{n+1} - a_n|}{n(n+1)} \\ &\leq \frac{n + \cdots + 1}{n(n+1)} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

2. Naći sve prirodne brojeve  $n$  takve da  $n + 2$  dijeli proizvod

$$3(n+3)(n^2+9).$$

**Rješenje.** Primijetimo da je

$$\text{nzd}(n+2, n+3) = 1.$$

Zato  $n + 2$  mora dijeliti proizvod

$$3(n^2+9).$$

Dalje,

$$3(n^2+9) = 3(n^2-4+13) = 3(n+2)(n-2) + 39.$$

Dakle,  $n + 2$  mora biti djelilac broja 39, i to barem 3, jer je  $n$  pozitivan.

Djelitelji broja 39 koji su barem 3 su

$$3, 13, 39.$$

Zato je

$$n + 2 \in \{3, 13, 39\},$$

pa je

$$n \in \{1, 11, 37\}.$$

3. U jednom kraljevstvu postoje samo novčanice vrijednosti 2, 3 i 7. Marko ide u knjižaru da kupi knjigu čija je cijena Marini poznata. Sa sobom ima ukupno 39 novčanica, ali Marina ne zna koliko je među njima novčanica svake od vrijednosti. Marina, dobra matematičarka, kaže Marku: „Bez obzira na to koliko novčanica vrijednosti 2, 3 i 7 imaš, ako ih ukupno imaš 39, sigurna sam da možeš tačno platiti cijenu knjige koristeći svoje novčanice.”  
Odrediti koliko je koštala knjiga i objasniti zašto je Marina u pravu.

**Rješenje.** Neka Marko ima:  $a$  novčanica od 2,  $b$  novčanica od 3,  $c$  novčanica od 7, pri čemu vrijedi  $a + b + c = 39$ .

Marina ne zna raspodjelu novčanica, ali tvrdi da Marko uvijek može tačno platiti cijenu knjige. To znači da cijena knjige mora biti iznos koji se može dobiti bez obzira na raspodjelu novčanica.

Ako bi Marko imao svih 39 novčanica od po 2, tada bi mogao platiti samo parne iznose do  $39 \cdot 2 = 78$ . Ako bi imao svih 39 novčanica od po 3, tada bi mogao platiti samo iznose djeljive sa 3. Ako bi imao svih 39 novčanica od po 7, tada bi mogao platiti samo iznose djeljive sa 7. Dakle, cijena knjige mora biti djeljiva sa 2, 3 i 7, odnosno mora biti djeljiva sa  $\text{nzs}(2, 3, 7) = 42$ . Pošto je maksimalan mogući iznos 78, jedina moguća vrijednost knjige jeste 42.

Preostaje pokazati da Marko uvijek može formirati iznos 42.

Ako Marko ima barem 21 novčanicu od 2, onda može platiti  $21 \cdot 2 = 42$ . Ako ima barem 14 novčanica od 3, onda može platiti  $14 \cdot 3 = 42$ . Ako ima barem 6 novčanica od 7, onda može platiti  $6 \cdot 7 = 42$ .

Pretpostavimo sada da nijedan od ovih slučajeva nije ispunjen. Tada vrijedi  $a \leq 20$ ,  $b \leq 13$ ,  $c \leq 5$ .

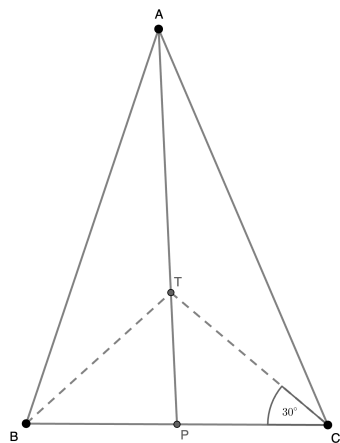
Sabiranjem dobijamo  $a + b + c \leq 20 + 13 + 5 = 38$ , što je kontradikcija sa uslovom  $a + b + c = 39$ .

Dakle, barem jedan od prethodnih slučajeva mora važiti, pa Marko uvijek može tačno platiti iznos od 42.

Stoga je cijena knjige 42.

4. U trouglu  $ABC$  sa težištem  $T$  važi  $AT = BC$  i  $\angle BCT = 30^\circ$ . Odrediti  $CT : AT$ .

**Rješenje.** Neka je  $BC = a$  i  $P$  središte duži  $BC$ . Tada je  $AT = BC = a$ . Kako je  $AT : PT = 2 : 1$ , to slijedi da je  $PT = \frac{a}{2}$ . Dalje je  $BP = CP = \frac{a}{2} = PT$ , pa je  $P$  centar opisane kružnice oko trougla  $\triangle TBC$ . Zato je  $\angle BTC = 90^\circ$ .



Kako je  $\angle BCT = 30^\circ$ , to je  $\angle TBC = 60^\circ$ . S obzirom da je  $BP = PT$  slijedi da je trougao  $\triangle BPT$  jednakostranični, pa je  $BT = \frac{a}{2}$ . Primjenom Pitagorine teoreme dobija se

$$CT = \sqrt{BC^2 - BT^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Zato je

$$CT : AT = \frac{a\sqrt{3}}{2} : a = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA CRNE GORE  
OLIMPIJADA ZNANJA 2026

Rješenja zadataka iz MATEMATIKE

za II razred srednje škole

1. Neka su  $a, b, c$  pozitivni realni brojevi. Dokazati da važi

$$\frac{a^3 + b^3}{a^3 + a^2b} + \frac{b^3 + c^3}{b^3 + b^2c} + \frac{c^3 + a^3}{c^3 + c^2a} \geq 3.$$

**Rješenje.** Primijetimo da je

$$\frac{a^3 + b^3}{a^3 + a^2b} = \frac{(a+b)(a^2 - ab + b^2)}{a^2(a+b)} = \frac{a^2 - ab + b^2}{a^2} = 1 - \frac{b}{a} + \left(\frac{b}{a}\right)^2.$$

Analogno,

$$\frac{b^3 + c^3}{b^3 + b^2c} = 1 - \frac{c}{b} + \left(\frac{c}{b}\right)^2,$$

i

$$\frac{c^3 + a^3}{c^3 + c^2a} = 1 - \frac{a}{c} + \left(\frac{a}{c}\right)^2.$$

Zato je dovoljno dokazati

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{b}\right)^2 + \left(\frac{a}{c}\right)^2 \geq \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}.$$

Uzimamo

$$x = \frac{b}{a}, \quad y = \frac{c}{b}, \quad z = \frac{a}{c}.$$

Tada je

$$xyz = 1,$$

pa treba dokazati

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq x + y + z.$$

Po AM-GM nejednakosti važi  $x^2 + 1 \geq 2x$ , odnosno

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3 \geq 2x + 2y + 2z$$

Kako je

$$x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3,$$

slijedi

$$2x + 2y + 2z - 3 \geq x + y + z,$$

pa dobijamo

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq x + y + z.$$

Time je nejednakost dokazana.

2. Naći sve cijele brojeve  $a, b, c$  koji zadovoljavaju sistem

$$ab + c = 100, \quad bc + a = 87, \quad ca + b = 60.$$

**Rješenje.** Oduzimanjem druge jednačine od prve dobijamo

$$13 = (ab + c) - (bc + a) = ab - bc - a + c = (b - 1)(a - c).$$

Pošto je 13 prost broj, imamo slučajeve

$$(b - 1, a - c) \in \{(1, 13), (-1, -13), (13, 1), (-13, -1)\}.$$

Ako je  $b - 1 = -1$ , onda je  $b = 0$ , pa iz prve dvije jednačine dobijamo  $c = 100$  i  $a = 87$ , što ne zadovoljava treću jednačinu.

Ako je  $b - 1 = 1$  i  $a - c = 13$ , onda je  $b = 2$ . Iz treće jednačine imamo  $ac = 58$ , ali nijedan par cijelobrojnih faktora broja 58 nema razliku 13. Zato ovaj slučaj nije moguć.

Ako je  $b - 1 = 13$  i  $a - c = 1$ , onda je  $b = 14$ , a iz treće jednačine  $ca = 46$ . Posljednja jednačina nema cijelobrojnih rješenja sa razlikom 1.

Ako je  $b - 1 = -13$  i  $a - c = -1$ , onda je  $b = -12$ , pa iz treće jednačine dobijamo  $ca = 72$ . Dakle,  $a = c - 1$ , pa

$$c(c - 1) = 72,$$

odnosno

$$c^2 - c - 72 = 0.$$

Zato je

$$(c - 9)(c + 8) = 0,$$

pa je  $c = 9$  ili  $c = -8$ . Ako je  $c = 9$ , onda je  $a = 8$ , ali tada

$$ab + c = 8(-12) + 9 = -87 \neq 100.$$

Ako je  $c = -8$ , onda je  $a = -9$ , i tada

$$ab + c = (-9)(-12) - 8 = 100, \quad bc + a = (-12)(-8) - 9 = 87, \quad ca + b = (-8)(-9) - 12 = 60.$$

Dakle, jedino rješenje u cijelim brojevima je

$$a = -9, \quad b = -12, \quad c = -8.$$

3. Neka je  $S \subseteq \{1, 2, 3, \dots, 2026\}$  takav da za svaka dva različita elementa  $x, y \in S$  važi  $|x - y| > 2$ , a za svaka dva različita neparna elementa  $x, y \in S$  važi  $|x - y| > 6$ . Odredi najveći mogući broj elemenata skupa  $S$ .

**Rješenje.** Posmatrajmo blokove od po 10 uzastopnih brojeva:

$$\{1, \dots, 10\}, \{11, \dots, 20\}, \dots, \{2011, \dots, 2020\}.$$

Ima ih 202, a preostaje još skup  $\{2021, \dots, 2026\}$ . Tvrđimo da u svakom bloku od 10 uzastopnih brojeva mogu biti najviše 3 elementa skupa  $S$ . Zaista, ako bi u nekom takvom bloku bila 4 elementa, zbog uslova  $|x - y| > 2$  oni bi morali biti međusobno udaljeni bar 3. U bloku dužine 10, jedina mogućnost za četiri takva elementa bila bi oblika

$$a, a + 3, a + 6, a + 9.$$

Međutim, tada su ili  $a$  i  $a + 6$  neparni, ili su  $a + 3$  i  $a + 9$  neparni. U oba slučaja dobijamo dva različita neparna elementa čija je razlika 6, što nije dozvoljeno jer za neparne elemente mora važiti  $|x - y| > 6$ . Dakle, svaki od 202 bloka daje najviše 3 elementa, pa od prvih 2020 brojeva možemo uzeti najviše  $202 \cdot 3 = 606$  elemenata.

U preostalom skupu  $\{2021, \dots, 2026\}$  mogu biti najviše 2 elementa skupa  $S$ . Naime, tri elementa sa međusobnim razmakom većim od 2 morala bi imati oblik najmanje  $b, b + 3, b + 6$ , što se ne može smjestiti u 6 uzastopnih brojeva. Zato je

$$|S| \leq 606 + 2 = 608.$$

Ova granica se dostiže, na primjer, izborom

$$S = \{n \leq 2020 : n \equiv 1, 4, 8 \pmod{10}\} \cup \{2021, 2024\}.$$

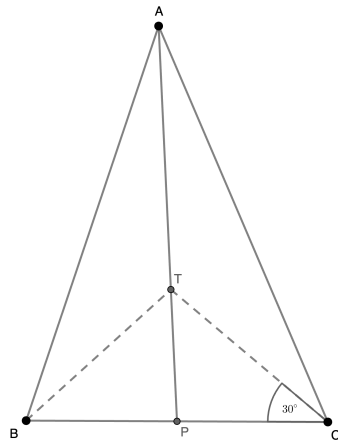
U ovom skupu razlike između uzastopnih izabranih elemenata su redom 3, 4, 3, 3, 4, 3, ..., pa je prvi uslov zadovoljen. Neparni izabrani elementi su udaljeni najmanje 10, pa je zadovoljen i drugi uslov. Dakle, postoji skup  $S$  sa

$$202 \cdot 3 + 2 = 608$$

elemenata koji zadovoljava sve uslove. Prema tome, najveći mogući broj elemenata skupa  $S$  je 608.

4. U trouglu  $ABC$  sa težistem  $T$  važi  $AT = BC$  i  $\angle BCT = 30^\circ$ . Odrediti  $CT : AT$ .

**Rješenje.** Neka je  $BC = a$  i  $P$  središte duži  $BC$ . Tada je  $AT = BC = a$ . Kako je  $AT : PT = 2 : 1$ , to slijedi da je  $PT = \frac{a}{2}$ . Dalje je  $BP = CP = \frac{a}{2} = PT$ , pa je  $P$  centar opisane kružnice oko trougla  $\triangle TBC$ . Zato je  $\angle BTC = 90^\circ$ .



Kako je  $\angle BCT = 30^\circ$ , to je  $\angle TBC = 60^\circ$ . S obzirom da je  $BP = PT$  slijedi da je trougao  $\triangle BPT$  jednakostranični, pa je  $BT = \frac{a}{2}$ . Primjenom Pitagorine teoreme dobija se

$$CT = \sqrt{BC^2 - BT^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Zato je

$$CT : AT = \frac{a\sqrt{3}}{2} : a = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA CRNE GORE

OLIMPIJADA ZNANJA 2026

Rješenja zadataka iz MATEMATIKE

za III razred srednje škole

1. Neka je  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  polinom sa realnim koeficijentima takav da važi  $a_i = a_{n-i}$  za svaki  $i = 0, 1, \dots, n$ , pri čemu je  $a_n \neq 0$ .

- (a) Dokazati da ako je  $c$  korijen polinoma  $P(x)$  tada je i  $\frac{1}{c}$  korijen polinoma  $P(x)$ .  
(b) Neka su  $x_1, x_2, \dots, x_k$  svi realni korijeni polinoma  $P(x)$ , bez ponavljanja. Dokazati da važi

$$|x_1| + |x_2| + \dots + |x_k| \geq k.$$

**Rješenje.**

- (a) Neka je  $c$  proizvoljan korijen polinoma  $P(x)$ . Pošto je

$$P(0) = a_0 = a_n \neq 0,$$

slijedi da je  $c \neq 0$ . Primijetimo da je

$$P\left(\frac{1}{c}\right) = a_n \left(\frac{1}{c}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{1}{c}\right)^{n-1} + \dots + a_1 \left(\frac{1}{c}\right) + a_0.$$

Množenjem sa  $c^n$  dobijamo

$$c^n P\left(\frac{1}{c}\right) = a_n + a_{n-1}c + \dots + a_1 c^{n-1} + a_0 c^n.$$

Kako je  $a_i = a_{n-i}$ , slijedi

$$c^n P\left(\frac{1}{c}\right) = a_0 + a_1 c + \dots + a_{n-1} c^{n-1} + a_n c^n = P(c) = 0.$$

Dakle,

$$P\left(\frac{1}{c}\right) = 0,$$

pa je i  $\frac{1}{c}$  korijen polinoma  $P(x)$ .

- (b) Korijeni polinoma  $P$  se mogu grupisati u parove recipročnih vrijednosti. Za svaki takav par važi

$$|c| + \left|\frac{1}{c}\right| \geq 2,$$

po AM-GM nejednakosti. Jedini brojevi koji su recipročni sami sebi su 1 i  $-1$ , i za njih je apsolutna vrijednost jednaka 1.

Ako je broj takvih korijena jednak  $m$ , gdje je  $m \in \{0, 1, 2\}$ , tada dobijamo

$$|x_1| + \cdots + |x_k| \geq \frac{k-m}{2} \cdot 2 + m = k.$$

**2.** Naći sve cijele brojeve  $a, b, c$  koji zadovoljavaju sistem

$$ab + c = 100, \quad bc + a = 87, \quad ca + b = 60.$$

**Rješenje.**

Oduzimanjem druge jednačine od prve dobijamo

$$13 = (ab + c) - (bc + a) = ab - bc - a + c = (b - 1)(a - c).$$

Pošto je 13 prost broj, imamo slučajeve

$$(b - 1, a - c) \in \{(1, 13), (-1, -13), (13, 1), (-13, -1)\}.$$

Ako je  $b - 1 = -1$ , onda je  $b = 0$ , pa iz prve dvije jednačine dobijamo  $c = 100$  i  $a = 87$ , što ne zadovoljava treću jednačinu.

Ako je  $b - 1 = 1$  i  $a - c = 13$ , onda je  $b = 2$ . Iz treće jednačine imamo  $ac = 58$ , ali nijedan par cijelobrojnih faktora broja 58 nema razliku 13. Zato ovaj slučaj nije moguć.

Ako je  $b - 1 = 13$  i  $a - c = 1$ , onda je  $b = 14$ , a iz treće jednačine  $ca = 46$ . Posljednja jednačina nema cijelobrojnih rješenja sa razlikom 1.

Ako je  $b - 1 = -13$  i  $a - c = -1$ , onda je  $b = -12$ , pa iz treće jednačine dobijamo  $ca = 72$ . Dakle,  $a = c - 1$ , pa

$$c(c - 1) = 72,$$

odnosno

$$c^2 - c - 72 = 0.$$

Zato je

$$(c - 9)(c + 8) = 0,$$

pa je  $c = 9$  ili  $c = -8$ . Ako je  $c = 9$ , onda je  $a = 8$ , ali tada

$$ab + c = 8(-12) + 9 = -87 \neq 100.$$

Ako je  $c = -8$ , onda je  $a = -9$ , i tada

$$ab + c = (-9)(-12) - 8 = 100, \quad bc + a = (-12)(-8) - 9 = 87, \quad ca + b = (-8)(-9) - 12 = 60.$$

Dakle, jedino rješenje u cijelim brojevima je

$$a = -9, \quad b = -12, \quad c = -8.$$



3. U ravni je dato 2026 tačkaka. Bilo koje 3 od njih formiraju trougao površine ne veće od 1. Dokazati da se svih 2026 tačkaka može smjestiti unutar nekog trougla površine ne veće od 4.

**Rješenje.**

Od svih trouglova čija su tjemena među datim tačkama izaberimo trougao najveće površine. Neka je to trougao  $ABC$ . Označimo njegovu površinu sa  $P$ . Po uslovu zadatka važi

$$P \leq 1.$$

Kroz tjeme  $A$  povucimo pravu paralelnu sa stranicom  $BC$ , kroz tjeme  $B$  pravu paralelnu sa stranicom  $AC$ , a kroz tjeme  $C$  pravu paralelnu sa stranicom  $AB$ .

Te tri prave formiraju veći trougao  $A'B'C'$  koji sadrži trougao  $ABC$ . Pošto su njegove stranice paralelne stranicama trougla  $ABC$ , tačke  $A, B, C$  nalaze se na stranicama većeg trougla. Lako se vidi da je svaka od njih sredina odgovarajuće strane većeg trougla, jer se oko njih formiraju paralelogrami  $ABA'C, ABCB', \dots$ . Zato je  $ABC$  srednji trougao tog većeg trougla, pa veći trougao ima dva puta duže stranice, odnosno njegova površina je  $4P$ . Kako je  $P \leq 1$ , površina većeg trougla nije veća od 4.

Dokažimo još da se sve date tačke nalaze u tom većem trouglu.

Pretpostavimo suprotno, da postoji data tačka  $X$  koja se nalazi izvan tog većeg trougla. Tada se  $X$  nalazi sa spoljašnje strane bar jedne od tri povučene paralelne prave.

Na primjer, ako je  $X$  sa spoljašnje strane prave kroz  $C$  koja je paralelna sa  $AB$ , onda je rastojanje tačke  $X$  od prave  $AB$  veće od rastojanja tačke  $C$  od prave  $AB$ .

Zato trougao  $ABX$  ima istu osnovicu  $AB$  kao trougao  $ABC$ , ali veću visinu. Dakle,

$$P_{ABX} > P_{ABC} = P.$$

To je nemoguće, jer smo trougao  $ABC$  izabrali kao trougao najveće površine među svim trouglovima određenim datim tačkama.

Zato nijedna od datih tačkaka ne može biti izvan većeg trougla. Prema tome, svih 2026 tačkaka nalaze se u tom trouglu, a njegova površina je  $4P \leq 4$ .

4. Krugovi  $k_1$  i  $k_2$  su tangentni na pravu  $l$  u tačkama  $A$  i  $B$  i tangentni su jedan na drugog u spoljašnjoj tački  $D$ . Tačka  $E$  je izabrana proizvoljno na manjem luku  $BD$  kruga  $k_2$ . Prava  $DE$  siječe krug  $k_1$  u još jednoj tački  $C$ . Dokazati da je  $BE$  ortogonalno na  $AC$ .

**Rješenje:**

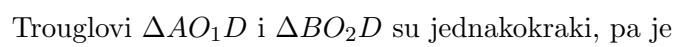
Neka su  $O_1$  i  $O_2$  centri za krugove  $k_1$  i  $k_2$ . Neka je  $F$  tačka presjeka za  $AC$  i  $BE$ .

Dokazaćemo da tačke  $A, B, D, F$  leže na istom krugu. Posmatramo jednakokrake trouglove  $\Delta O_1CD$  i  $\Delta O_2DE$ . Važi da je  $\angle O_1DC = \angle O_2DE$ , kao unakrsni uglovi, pa je  $\angle CO_1D = \angle DO_2E$ . Zato je

$$\angle CAD = \frac{1}{2}\angle CO_1D = \frac{1}{2}\angle DO_2E = \angle DBE.$$

Dobijamo da je  $\angle FAD = \angle FBD$ . Slijedi da se iz tačkaka  $A$  i  $B$  duž  $FD$  vidi pod istim uglom, stoga  $A, B, D, F$  pripadaju istom krugu.

Dalje je  $O_1A \parallel O_2B$  pa je  $\angle AO_1D + \angle BO_2D = 180^\circ$ .



Zato je  $\angle ADB = 90^\circ$ . Pošto tačke  $A, B, D, F$  pripadaju istom krugu, slijedi da je  $\angle AFB = 90^\circ$ , što je trebalo dokazati.

**PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET**  
**DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA CRNE GORE**  
**OLIMPIJADA ZNANJA 2026**

**Rješenja zadataka iz MATEMATIKE**

**za IV razred srednje škole**

1. Neka je  $M$  najveći cijeli broj takav da su i  $M + 1213$  i  $M + 3773$  potpuni kvadrati. Odrediti  $M$ .

**Rješenje.** Pretpostavimo da je

$$M + 1213 = j^2, \quad M + 3773 = k^2,$$

za nenegativne cijele brojeve  $j$  i  $k$ . Tada

$$(k + j)(k - j) = k^2 - j^2 = 3773 - 1213 = 2560 = 5 \cdot 2^9.$$

Pošto  $k + j$  i  $k - j$  imaju istu parnost, a njihov proizvod je paran, oba moraju biti parna. Zato jedan faktor mora biti  $5 \cdot 2^i$ , a drugi  $2^{9-i}$ , za neki  $1 \leq i \leq 8$ . Dakle,

$$k = \frac{5 \cdot 2^i + 2^{9-i}}{2}.$$

Da bi  $M$  bio najveći, dovoljno je da  $k$  bude najveći, što se postiže za  $i = 8$ . Tada je

$$k = \frac{5 \cdot 2^8 + 2}{2} = 641.$$

Otuda

$$M = 641^2 - 3773 = 407108.$$

2. Na stolu se nalazi 2026 novčića i svi su na početku okrenuti glavom nagore. Igrač igra 2026 rundi. U  $i$ -toj rundi, za svako

$$i = 1, 2, \dots, 2026,$$

on okrene tačno  $i$  proizvoljno izabranih novčića na suprotnu stranu.

Da li je moguće da nakon svih 2026 rundi svi novčići budu okrenuti pismom nagore?

**Rješenje:**

Svaki novčić je na početku okrenut glavom nagore. Da bi na kraju bio okrenut pismom nagore, mora biti okrenut neparan broj puta.

Ako bi na kraju svih 2026 novčića bilo okrenuto pismom nagore, tada bi svaki novčić bio okrenut neparan broj puta. Zbir broja okretanja svih novčića bio bi zbir 2026 neparnih brojeva.

Pošto je 2026 paran broj, zbir 2026 neparnih brojeva mora biti paran.

S druge strane, ukupan broj svih okretanja jednak je

$$1 + 2 + \dots + 2026 = \frac{2026 \cdot 2027}{2} = 1013 \cdot 2027.$$

Brojevi 1013 i 2027 su neparni, pa je njihov proizvod neparan.

Dakle, ukupan broj okretanja bi morao biti i paran i neparan, što je nemoguće.

Zato nije moguće da nakon svih rundi svi novčići budu okrenuti pismom nagore.

3. Odrediti sve funkcije  $f : \mathbf{N}_0 \rightarrow \mathbf{N}_0$  ( $\mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \cup \{0\}$ ) za koje važi  $f(x^2 + f(y)) = xf(x) + y$ .

**Rješenje:**

Za  $x = 0$  nalazimo da je  $f(f(y)) = y$  za svako  $y \in \mathbf{N}_0$ , tj. zaključujemo da je preslikavanje  $f : \mathbf{N}_0 \rightarrow \mathbf{N}_0$  surjektivno, tj. za svako  $y \in \mathbf{N}_0$  postoji  $x \in \mathbf{N}_0$  tako da je  $f(x) = y$ .

Dalje, za  $x = 1$  imamo  $f(1 + f(y)) = f(1) + y$ , tj. za  $y = f(x)$  dobijamo  $f(1 + x) = f(1) + f(x)$ . Iz posljednje jednakosti indukcijom nalazimo  $f(n) = nf(1)$  za svako  $n \in \mathbf{N}_0$ . Primijetimo da je  $f(1) = 1$ , u protivnom ako  $f(1) \neq 1$ , kako je  $f(\mathbf{N}) = f(1)\mathbf{N}$  to funkcija  $f$  ne bi bila surjekcija. Dakle, jedino rješenje je identično preslikavanje  $f(x) = x$ .

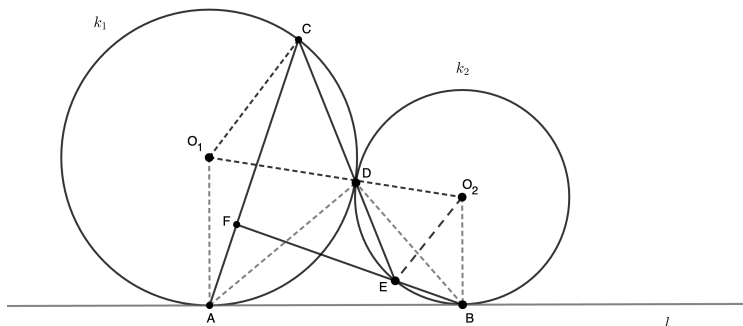
4. Krugovi  $k_1$  i  $k_2$  su tangentni na pravu  $l$  u tačkama  $A$  i  $B$  i tangentni su jedan na drugog u spoljašnjoj tački  $D$ . Tačka  $E$  je izabrana proizvoljno na manjem luku  $BD$  kruga  $k_2$ . Prava  $DE$  siječe krug  $k_1$  u još jednoj tački  $C$ . Dokazati da je  $BE$  ortogonalno na  $AC$ .

**Rješenje:** Neka su  $O_1$  i  $O_2$  centri za krugove  $k_1$  i  $k_2$ . Neka je  $F$  tačka presjeka za  $AC$  i  $BE$ . Dokazaćemo da tačke  $A, B, D, F$  leže na istom krugu. Posmatramo jednakokrake trouglove  $\triangle O_1CD$  i  $\triangle O_2DE$ . Važi da je  $\angle O_1DC = \angle O_2DE$ , kao unakrsni uglovi, pa je  $\angle CO_1D = \angle DO_2E$ . Zato je

$$\angle CAD = \frac{1}{2}\angle CO_1D = \frac{1}{2}\angle DO_2E = \angle DBE.$$

Dobijamo da je  $\angle FAD = \angle FBD$ . Slijedi da se iz tačkama  $A$  i  $B$  duž  $FD$  vidi pod istim uglom, stoga  $A, B, D, F$  pripadaju istom krugu.

Dalje je  $O_1A \parallel O_2B$  pa je  $\angle AO_1D + \angle BO_2D = 180^\circ$ .



Trouglovi  $\triangle AO_1D$  i  $\triangle BO_2D$  su jednakokraki, pa je

$$\angle O_1DA + \angle O_2DB = (90^\circ - \frac{1}{2}\angle AO_1D) + (90^\circ - \frac{1}{2}\angle BO_2D) = 90^\circ.$$

Zato je  $\angle ADB = 90^\circ$ . Pošto tačke  $A, B, D, F$  pripadaju istom krugu, slijedi da je  $\angle AFB = 90^\circ$ , što je trebalo dokazati.